

0.8

## CONTROLE 1 (durée : 1h30)

### EXERCICE : (Questions de cours)

1. Enoncer le théorème de la base incomplète.
2. Soient  $E$  et  $F$  deux espaces vectoriels sur le même corps  $K$  et  $f : E \longrightarrow F$  une application linéaire.
  - (a) Rappeler la définition du noyau  $\ker(f)$  de  $f$ .
  - (b) Montrer que :  $f$  est injective  $\iff \ker(f) = \{0_E\}$ .

### PROBLEME :

Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension finie sur un corps  $K$  et soient  $F$  et  $G$  deux sous-espaces vectoriels de  $E$ .

1. Soit  $(e_1, \dots, e_p)$  une base du sous-espace  $F \cap G$ . Montrer qu'on peut compléter  $(e_1, \dots, e_p)$  en une base  $(e_1, \dots, e_p, a_1, \dots, a_r)$  de  $F$  et en une base  $(e_1, \dots, e_p, b_1, \dots, b_s)$  de  $G$ .
2. Montrer que  $(e_1, \dots, e_p, a_1, \dots, a_r, b_1, \dots, b_s)$  est une famille génératrice du sous-espace  $F + G$ .
3. Montrer que cette famille est libre.
4. En déduire la formule :  $\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$ .

Dans la suite, on prend  $E = \mathbb{R}^4$  et on considère les vecteurs :

$$v_1 = (1, 3, 2, 0); v_2 = (0, 5, 3, 3); v_3 = (-1, 2, 1, 3);$$

$$w_1 = (1, 1, -1, 0); w_2 = (2, 11, 7, 3).$$

Soit  $F$  le sous-espace de  $E$  engendré par  $v_1, v_2, v_3$  et soit  $G$  le sous-espace de  $E$  engendré par  $w_1, w_2$ .

5. Déterminer les dimensions de  $F$  et  $G$ .
6. Déterminer la dimension de  $F \cap G$ .
7. En déduire la dimension de  $F + G$ .
8. Quel est le rang de la famille de vecteurs  $(v_1, v_2, v_3, w_1, w_2)$  ?
9. On considère le sous-espace vectoriel  $H$  de  $E$  défini par

$$H = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / 5x - 3y + 2z + 3t = 0\}.$$

Montrer que  $F + G = H$ .

10. Donner un sous-espace supplémentaire de  $H$  dans  $E$ .

*FIN*



ETU UP.com

Programmmation  
**Cours**  
Electricité  
Physique  
Résumés  
Analyse  
Livres  
Exercices  
Contrôles Continus  
Langues  
Thermodynamique  
Multimedia  
Economie  
Chimie Organique  
Informatique  
Optique  
Chimie  
Diapo  
Corrigés  
Algèbre  
Mathématiques  
Mécanique  
Travaux Pratiques  
Droit

et encore plus..